线性空间的直和分解

杜妮

厦门大学数学科学学院

01/10/2015

目录

线性空间的直和分解的定义

- 线性空间的直和分解

线性空间的直和分解的定义

- **线性空间的直和分解**

  设V_1, V_2是有限维线性空间V的子空间,则$V = V_1 \oplus V_2$等价于:

  (1) $V = V_1 + V_2$ 且$V_1 \cap V_2 = 0$.

  (2) $\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$ 且$V_1 \cap V_2 = 0$.

  (3) $V = V_1 + V_2$ 且 $\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$.

  (4) V_1和V_2的基凑成V的基.

  (5) 对任意的$\alpha \in V$, 有$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 \in V_1,\ \alpha_2 \in V_2$,
  且表示法唯一.

线性空间直和分解的定义

线性空间直和分解的定义

- 设$V_1, V_2, \cdots, V_m$是有限维线性空间V的子空间, 如果$V_1+V_2+\cdots+V_m$中任意向量α的分解式

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m,\quad \alpha_i\in V_i,\ i=1,2,\cdots,m$$

是唯一的, 则称$V_1+V_2+\cdots+V_m$为直和, 记为$V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_m$.

线性空间直和分解的定义

线性空间直和分解的定义

- 设$V_1, V_2, \cdots, V_m$是有限维线性空间V的子空间, 则下列命题等价:

  (1) $V_1 + V_2 + \cdots + V_m = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m$;

  (2)零元素表示法唯一,即$0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m$, $\alpha_i \in V_i$, 则$\alpha_i = 0 (i = 1, 2, \cdots, m)$;

  (3) $V_i \cap (V_1 + \cdots + V_{i-1} + V_{i+1} \cdots + V_m) = 0 (i = 1, 2, \cdots, m)$;

  (4)V_i的基$\xi_{i1}, \cdots, \xi_{is_i} (i = 1, 2, \cdots, m)$凑成$V_1 + V_2 + \cdots + V_m$的一个基$\xi_{11}, \cdots, \xi_{1s_1}, \xi_{21}, \cdots, \xi_{2s_2}, \cdots, \xi_{m1}, \cdots, \xi_{ms_m}$;

  (5) $\dim(V_1 + V_2 + \cdots + V_m) = \dim V_1 + \dim V_2 + \cdots + \dim V_m$.

线性空间直和分解的例子

- **例1.1.**
  设$V=\{A\in K^{n\times n}|\mathrm{tr}(A)=0\},U=\{\lambda I_n\in K^{n\times n}|\lambda\in K\}$,则
  (1) U,V是$K^{n\times n}$的子空间.
  (2) $K^{n\times n}=V\oplus U$.

线性空间直和分解的例子

- **例1.1.**
  设$V=\{A\in K^{n\times n}|\mathrm{tr}(A)=0\}, U=\{\lambda I_n\in K^{n\times n}|\lambda\in K\}$,则
  (1) U, V是$K^{n\times n}$的子空间.
  (2) $K^{n\times n}=V\oplus U$.
- **例1.2.**
  设V是数域K上的n维列向量空间, V_1与V_2分别是K上线性方程组$x_1=x_2=\cdots=x_n$与$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$的解空间,
  则$V=V_1\oplus V_2$.

线性空间直和分解的例子

线性空间直和分解的例子

- **例1.3.**
  设V是数域K上的有限维线性空间, V_1为其非零子空间,如果存在唯一的子空间V_2,使得$V = V_1 \oplus V_2$,则$V_1 = V$.

- **证明.** 若$V_1 \neq V$,设$\dim V_1 = m$,$\dim V = n$,则$m < n$.取V_1的一个基$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$扩为$V$的一个基$\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_n$.
  令$V_2 = L(\alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_n)$,则$V = V_1 \oplus V_2$.
  令$V_3 = L(\alpha_1 + \alpha_{m+1}, \cdots, \alpha_n)$,可见$V = V_1 \oplus V_3$且$V_2 \neq V_3$.

线性空间直和分解的例子

线性空间直和分解的例子

- **例1.4.** 设V_1, V_2是线性空间V的子空间且$V = V_1 \bigoplus V_2$.
  对$i = 1, 2$, 定义$\tau_i : V \longrightarrow V_i, (a_1, a_2) \mapsto a_i$.(投影映射);
  $\sigma_1 : V_1 \to V,\ a_1 \mapsto (a_1, 0)$; $\sigma_2 : V_2 \to V,\ a_2 \mapsto (0, a_2)$(嵌入映射),
  则$\tau_i, \sigma_i, i = 1, 2$ 是线性映射,
  且满足$\tau_i\sigma_i = id_{V_i}$,$\tau_j\sigma_i = 0 (i \neq j)$,$\sigma_1\tau_1 + \sigma_2\tau_2 = id_V$.
  此时$V = \mathrm{Im}\sigma_1\tau_1 \oplus \mathrm{Im}\sigma_2\tau_2$.

线性空间直和分解的例子

- **例1.5.**
  设φ是有限维线性空间V上的线性变换,则φ 可逆$\Longleftrightarrow$若$V = V_1 \oplus V_2$，则$V = \varphi(V_1) \oplus \varphi(V_2)$.

线性空间直和分解的例子

- **例1.5.**
  设φ是有限维线性空间V上的线性变换,则φ 可逆$\Longleftrightarrow$若$V = V_1 \oplus V_2$, 则$V = \varphi(V_1) \oplus \varphi(V_2)$.
- **证明概要.** 设$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$与$\alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_n$分别是$V_1$,$V_2$的一个基,由$V = V_1 \oplus V_2$,则$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$为$V$的一个基.
  若$V = \varphi(V_1) \oplus \varphi(V_2)$,则$\varphi(\alpha_1), \cdots, \varphi(\alpha_n)$线性无关,从而$\varphi$可逆.
  反之,若φ可逆,则$\varphi(\alpha_1), \cdots, \varphi(\alpha_n)$为$V$的一个基,从而$V = L(\varphi(\alpha_1), \cdots, \varphi(\alpha_n)) = L(\varphi(\alpha_1), \cdots, \varphi(\alpha_r)) \oplus L(\varphi(\alpha_{r+1}), \cdots, \varphi(\alpha_n))$,即$V = \varphi(V_1) \oplus \varphi(V_2)$.

维数公式

设V是有限维线性空间, $\mathcal{A}$是V上的线性变换, 则

$$\dim(\mathsf{Im}\mathcal{A}) + \dim(\mathsf{Ker}\mathcal{A}) = \dim(V).$$

维数公式

设V是有限维线性空间, $\mathcal{A}$是V上的线性变换, 则

$$\dim(\mathsf{Im}\mathcal{A}) + \dim(\mathsf{Ker}\mathcal{A}) = \dim(V).$$

注:一般地,未必有$V = \mathsf{Im}\mathcal{A} \oplus \mathsf{Ker}\mathcal{A}$.

线性变换的像与核与线性空间的直和分解

- **例2.1.** 设φ是n维线性空间V上的线性变换,则

  (1)$\mathrm{Ker}\varphi \subseteq \mathrm{Ker}\varphi^2 \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{Ker}\varphi^m \subseteq \cdots$;

  (2)$\mathrm{Im}\varphi \supseteq \mathrm{Im}\varphi^2 \supseteq \cdots \supseteq \mathrm{Im}\varphi^m \supseteq \cdots$;

  (3)存在正整数s,使得$\mathrm{Ker}\varphi^s = \mathrm{Ker}\varphi^{s+1}$;

  (4)存在正整数t,使得$\mathrm{Im}\varphi^t = \mathrm{Im}\varphi^{t+1}$;

  (5)若$\mathrm{Ker}\varphi^s = \mathrm{Ker}\varphi^{s+1}$,则对于任意的正整数$i$,有$\mathrm{Ker}\varphi^s = \mathrm{Ker}\varphi^{s+i}$;

  (6)若$\mathrm{Im}\varphi^t = \mathrm{Im}\varphi^{t+1}$,则对于任意的正整数$i$,有$\mathrm{Im}\varphi^t = \mathrm{Im}\varphi^{t+i}$;

  (7)$\mathrm{Ker}\varphi^s = \mathrm{Ker}\varphi^{s+1}$的充分必要条件是$\mathrm{Im}\varphi^s = \mathrm{Im}\varphi^{s+1}$;

  (8)存在s,使得$V = \mathrm{Im}\varphi^s \oplus \mathrm{Ker}\varphi^s$.

线性变换的像与核与线性空间的直和分解

- **例2.2.** 设φ是n维线性空间V上的线性变换, 则$V = \mathrm{Im}\varphi \oplus \mathrm{Ker}\varphi$等价于:

  (1) $\mathrm{Ker}\varphi = \mathrm{Ker}\varphi^2$;

  (2) $\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Im}\varphi^2$;

  (3) $\dim \mathrm{Ker}\varphi = \dim \mathrm{Ker}\varphi^2$;

  (4) $\dim \mathrm{Im}\varphi = \dim \mathrm{Im}\varphi^2$;

  (5) $\mathrm{Ker}\varphi \cap \mathrm{Im}\varphi = 0$;

线性变换的像与核与线性空间的直和分解

- **例2.3.** 设V是n维线性空间, $\mathcal{A}$是V上的线性变换且$\dim \mathrm{Im}(\mathcal{A}) < n$, 证明$V = \mathrm{Im}\mathcal{A} \oplus \mathrm{Ker}\mathcal{A} \Longleftrightarrow 0$是$m_{\mathcal{A}}(\lambda)$的单根.

线性变换的像与核与线性空间的直和分解

- **例2.3.** 设V是n维线性空间, $\mathcal{A}$是V上的线性变换且$\dim \mathrm{Im}(\mathcal{A}) < n$, 证明$V = \mathrm{Im}\mathcal{A} \oplus \mathrm{Ker}\mathcal{A} \Longleftrightarrow 0$是$m_{\mathcal{A}}(\lambda)$的单根.
- **证明概要.** 设$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$是$V$的一个基,$\mathcal{A}$在这个基下的矩阵是$A$.由于$\dim \mathrm{Im}(\mathcal{A}) < n$,则0是$A$的特征值.若0为$r$重特征值,则由$A$的相似标准型知$r(A) \neq r(A^2)$, 与$V = \mathrm{Im}\mathcal{A} \oplus \mathrm{Ker}\mathcal{A}$矛盾.

  反之，若0是$m_{\mathcal{A}}(\lambda)$的单根,则Jordan块中属于0的最大块阶数为1，从而$r(A) = r(A^2)$, $V = \mathrm{Im}\mathcal{A} \oplus \mathrm{Ker}\mathcal{A}$.

幂等变换与线性空间的直和分解

- **例3.1.** 设V是有限维线性空间且$\mathcal{A}$是V上的幂等线性变换，则$V = \mathrm{Im}\mathcal{A} \oplus \mathrm{Ker}\mathcal{A}$,
  其中$\mathrm{Im}\mathcal{A} = \mathrm{Ker}(id_V - \mathcal{A})$,$\mathrm{Ker}\mathcal{A} = \mathrm{Im}(id_V - \mathcal{A})$.

幂等变换与线性空间的直和分解

- **例3.2** 设V是有限维线性空间且$V = V_1 \oplus V_2$,则存在唯一的V上的幂等线性变换φ, 使得$V_1 = \mathrm{Im}\varphi$, $V_2 = \mathrm{Ker}\varphi$.

幂等变换与线性空间的直和分解

- **例3.2** 设V是有限维线性空间且$V=V_1\oplus V_2$,则存在唯一的V上的幂等线性变换φ, 使得$V_1=\mathrm{Im}\varphi$, $V_2=\mathrm{Ker}\varphi$.
- 证明概要:由于$V=V_1\oplus V_2$,则对于$\forall\alpha\in V$,$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$且表示法唯一.令$\varphi(\alpha)=\alpha_1+0$,则$\varphi^2=\varphi$.不难验证$\mathrm{Im}\varphi=V_1$, $\mathrm{Ker}\varphi=V_2$.

  (唯一性)若存在幂等线性变换ψ, 使得$V_1=\mathrm{Im}\psi$, $V_2=\mathrm{Ker}\psi$.对于任意$\alpha\in V$,考虑$v=\psi(\alpha)-\varphi(\alpha)$,一方面,由于$\mathrm{Im}\varphi=\mathrm{Im}\psi=V_1$,所以$v\in V_1$.另一方面,由于$\psi(v)=0$,所以$v\in V_2$,从而$v=0$.即$\psi=\varphi$.

幂等变换与线性空间的直和分解

- **例3.3** 设$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_s$是$n$维线性空间$V$的$s$个不同的线性变换,且满足:

  (1) $\varphi_i^2=\varphi_i$, $1\le i\le s$;

  (2) $\varphi_i\varphi_j=0$, $1\le i\ne j\le s$;

  (3) $\mathrm{Ker}\varphi_1\cap\mathrm{Ker}\varphi_2\cap\cdots\cap\mathrm{Ker}\varphi_s=0$.

  则$V=\mathrm{Im}\varphi_1\oplus\mathrm{Im}\varphi_2\oplus\cdots\oplus\mathrm{Im}\varphi_s$.

幂等变换与线性空间的直和分解

- **证明概要:**

  1) 若$\alpha = \varphi_i(\beta) = \Sigma_{j\neq i}\varphi_j(\alpha_j)$,则$\varphi_i(\alpha) = \varphi_i^2(\beta) = \varphi_i(\beta) = \alpha = \varphi_i(\Sigma_{j\neq i}\varphi_j(\alpha_j)) = 0$,所以$\mathrm{Im}\varphi_i \cap (\Sigma_{j\neq i}\mathrm{Im}\varphi_j) = 0$.

  2) 对于任意$\alpha \in V$,
  $\alpha = \varphi_1(\alpha) + \cdots + \varphi_m(\alpha) + [\alpha - (\varphi_1(\alpha) + \cdots + \varphi_m(\alpha))]$,
  而$\alpha - (\varphi_1(\alpha) + \cdots + \varphi_m(\alpha)) \in \mathrm{Ker}\varphi_1 \cap \cdots \cap \mathrm{Ker}\varphi_s = 0$.于是$\alpha = \varphi_1(\alpha) + \cdots + \varphi_m(\alpha)$, 从而$V = \mathrm{Im}\varphi_1 + \mathrm{Im}\varphi_2 + \cdots + \mathrm{Im}\varphi_s$.

Jordan标准型与线性空间的直和分解

- **例4.1.**
  设V是数域K上有限维线性空间, $\mathcal{A}$是V上的线性变换，
  设$f_1(x), f_2(x) \in K[x]$且$(f_1(x), f_2(x)) = 1$,若$f(x) = f_1(x)f_2(x)$，
  则$\mathrm{Ker} f(\mathcal{A}) = \mathrm{Ker} f_1(\mathcal{A}) \oplus \mathrm{Ker} f_2(\mathcal{A})$.

Jordan标准型与线性空间的直和分解

- **例4.1.**
  设V是数域K上有限维线性空间, $\mathcal{A}$是V上的线性变换,
  设$f_1(x), f_2(x) \in K[x]$且$(f_1(x), f_2(x)) = 1$,若$f(x) = f_1(x)f_2(x)$,
  则$\mathrm{Ker} f(\mathcal{A}) = \mathrm{Ker} f_1(\mathcal{A}) \oplus \mathrm{Ker} f_2(\mathcal{A})$.

- **证明.** 由于$(f_1(x), f_2(x)) = 1$,则存在$u_1(x), u_2(x) \in K[x]$,使得$u_1(x)f_1(x) + u_2(x)f_2(x) = 1$,从
  而$u_1(A)f_1(A) + u_2(A)f_2(A) = E$. 任意$\alpha \in \mathrm{Ker} f(\mathcal{A})$,$\alpha = u_1(A)f_1(A)\alpha + u_2(A)f_2(A)\alpha \in \mathrm{Ker} f_2(\mathcal{A}) + \mathrm{Ker} f_1(\mathcal{A})$, 所
  以$\mathrm{Ker} f(\mathcal{A}) = \mathrm{Ker} f_1(\mathcal{A}) + \mathrm{Ker} f_2(\mathcal{A})$. 又$\mathrm{Ker} f_1(\mathcal{A}) \cap \mathrm{Ker} f_2(\mathcal{A}) = 0$,所
  以$\mathrm{Ker} f(\mathcal{A}) = \mathrm{Ker} f_1(\mathcal{A}) \oplus \mathrm{Ker} f_2(\mathcal{A})$.

Jordan标准型与线性空间的直和分解

命题

设$\mathcal{A}$是$\mathbb{C}$上n维线性空间V的线性变换，

$$m_{\mathcal{A}}(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{l_1}(\lambda-\lambda_2)^{l_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{l_s},$$

其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$是$\mathcal{A}$的全部互异特征值，
则$V = \mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\lambda_1 id_V)^{l_1} \oplus \mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\lambda_2 id_V)^{l_2} \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\lambda_s id_V)^{l_s}$.

Jordan标准型与线性空间的直和分解

- **例4.2.** 设V是数域K上有限维线性空间, φ是V上的线性变换,φ在基$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a \end{pmatrix}.$$

则V不能分解成两个非平凡的φ-子空间的直和.

Jordan标准型与线性空间的直和分解

- **证明.** 设U为任意一个非零$\varphi-$不变子空间，任取一个非零向量$\alpha \in U$. 由$\alpha \in V$，可设$\alpha = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \cdots + a_n\xi_n$，则$a_1, a_2, \cdots, a_n$不全为零. 不妨设$a_i$是$a_1, a_2, \cdots, a_n$中第一个不为零者，此时

$$\alpha = a_i\xi_i + a_{i+1}\xi_{i+1} + \cdots + a_n\xi_n \in U.$$

根据$\varphi(\alpha) - a\alpha \in U$得到

$$a_i\xi_{i+1} + a_{i+1}\xi_{i+2} + \cdots + a_{n-1}\xi_n \in U.$$

再根据$\varphi(a_i\xi_{i+1} + a_{i+1}\xi_{i+2} + \cdots + a_{n-1}\xi_n) - a(a_i\xi_{i+1} + a_{i+1}\xi_{i+2} + \cdots + a_{n-1}\xi_n) \in U$ 得到

$$a_i\xi_{i+2} + a_{i+1}\xi_{i+3} + \cdots + a_{n-2}\xi_n \in U.$$

以此类推,最后我们有$a_i\xi_n \in U$. 由于$a_i \neq 0$，因此$\xi_n \in U$.

任意两个非平凡$\varphi-$不变子空间V_1, V_2必包含ξ_n，故$V_1 \cap V_2 \neq 0$，从而V不能分解为两个非平凡$\varphi-$不变子空间的直和.

Jordan标准型与线性空间的直和分解

命题

设V是数域K上有限维线性空间, $\mathcal{A}$是V上的线性变换,W是$\mathcal{A}$-不变子空间,则W不能分解成两个非平凡$\mathcal{A}$-不变子空间的直和的充分必要条件是W为循环子空间.

谢谢大家！